

# Analisi integrata multi-body FEM del comportamento dinamico di un kart

R. Baudille, M. E. Biancolini, C. Brutti, L. Reccia

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Roma "Tor Vergata"*  
*Via di Tor Vergata, 110 - 00133 Roma*  
*e-mail: biancolini@ing.uniroma2.it*

**Keywords:** frame stiffness optimisation, vehicle dynamic, finite element method, multi-body analysis, static condensation

## Sommario

Lo scopo di questo lavoro è quello di mettere a punto una metodologia di simulazione, basata sui moderni strumenti numerici dell'analisi dinamica e strutturale, al fine di assistere la progettazione e la messa a punto dei moderni telai per kart. L'utilizzo di questi strumenti è stato finalizzato all'analisi statica e soprattutto all'analisi dinamica del kart nel suo complesso, legando la sua struttura geometrica al suo comportamento dinamico in pista. Il percorso logico che è stato seguito prevede innanzitutto un'analisi agli elementi finiti (FEM), per caratterizzare il telaio in termini di rigidità (fase statica), successivamente, sulla base dei risultati ottenuti, si procede alla caratterizzazione del telaio in termini di maneggevolezza (fase handling) con l'utilizzo di uno strumento di simulazione dinamica multibody (fase dinamica). In quest'ultimo sono considerati oltre all'elasticità del telaio, quella dei pneumatici nonché la distribuzione delle masse e le caratteristiche cinematiche dello sterzo. L'applicazione della metodologia descritta può essere rivolta sia alla progettazione, dalla sua fase iniziale fino all'ottimizzazione finale, o può essere applicato a strutture già esistenti come strumento di analisi, per poi procedere con un processo iterativo di ottimizzazione, seguendo criteri di progettazione generali uniti ai risultati specifici ottenuti ad ogni step di ottimizzazione.

## Abstract

In this paper a numerical integrated approach to model the dynamic behaviour of a kart is developed in order to get a tool useful in the design and optimisation steps. The approach, based on the structural and dynamic analysis, links the dynamic behaviour of the kart during the race to the structural and geometric parameters. The first step of the study is carried out by means of a FEM analysis of the frame to evaluate the static stiffness. After this the frame is evaluated from the handling point of view using a multi-body dynamic analysis. In the model the stiffness of the frame and of the tires is taken into account, considering also the mass distribution and the kinematic properties of the steering mechanism. This approach, already developed for other types of mechanical systems, can be used for the design process of a new frame, from the preliminary design step up to the final optimisation. Moreover it can be used also for an existing frame in order to choose the best configuration basing on the features of a particular race circuit.

## 1. INTRODUZIONE

La progettazione e la messa a punto di un go-kart ha subito, dagli albori fino ad oggi, una evoluzione essenzialmente sperimentale. Lo stato dell'arte di questo settore dei veicoli da competizione, è il frutto di una dura evoluzione naturale della "specie": le forme dei telai che vediamo oggi sono soltanto gli "individui" che hanno resistito alla selezione di anni di sperimentazione e prove in pista. Grazie alla notevole diffusione di questo sport, e quindi agli investimenti di privati, di aziende del settore e di appassionati, di recente il *karting* si sta evolvendo verso un contenuto tecnologico tale da necessitare criteri e strumenti di progettazione e di analisi, caratteristici dell'ingegneria moderna ed ha coinvolto recentemente il mondo accademico, come è possibile desumere da alcuni contributi citati in bibliografia [1–3]. In [1] viene affrontato il problema della progettazione a resistenza del telaio basata sul metodo degli elementi finiti e su una valutazione semplificata dei carichi agenti; in [2] viene proposto un modello dinamico, sviluppato per il software ADAMS, basato su una formulazione rigida del sistema, valutando l'elasticità attraverso un unico parametro di rigidità del telaio: la rigidità torsionale; in [3], infine, viene esposta una procedura sperimentale per l'acquisizione del comportamento dinamico del kart.

La struttura di un kart, apparentemente molto semplice, nasconde in realtà un insieme di obiettivi ben precisi. Infatti l'assenza di ogni tipo di sistema di sospensione, l'assenza del differenziale, la posizione asimmetrica di motore e pilota, il sistema frenante, accrescono in maniera decisiva l'importanza della forma e

della rigidità del telaio. La ricerca dell'*optimum* è sempre un compromesso tra diverse esigenze: un buon equilibrio tra il comportamento in frenata, ingresso in curva, curva a raggio costante, uscita in curva, accelerazione e rettilineo determina quello che si definisce un telaio equilibrato. Ogni singolo elemento, che compone la struttura, ha la sua importanza e ne influenza il comportamento globale; quindi il processo di ottimizzazione può coinvolgere ogni componente, senza restrizioni di sorta se non quella dell'omologazione, da parte delle autorità che regolano le competizioni sportive [4]. Oltre alla struttura meccanica, il comportamento del telaio è influenzato da un'insieme di parametri su cui si può agire: convergenza, angolo di camber, angolo di caster, carreggiata anteriore e posteriore, altezza da terra, rigidità dell'assale posteriore e tipo di mozzi, pressione dei pneumatici e posizione del pilota [5]. Di conseguenza un processo di ottimizzazione non può prescindere dal considerare un range di variabilità di almeno i principali parametri appena citati. Gli obiettivi fondamentali che un buon telaio è chiamato a perseguire sono, in estrema sintesi, una buona deformabilità tra anteriore e posteriore, la capacità di percorrere buona parte della curva con la ruota posteriore interna sollevata (effetto differenziale) ed una buona reattività in uscita di curva. Le prestazioni sempre crescenti degli pneumatici hanno esasperato le caratteristiche tecniche del telaio mettendone maggiormente in risalto i pregi e i difetti.

In questo lavoro, basandosi su esperienze acquisite recentemente dagli autori sul tema della dinamica del veicolo [6–8], sull'ottimizzazione geometrica di telai per veicoli [9] e sull'approccio integrato multibody/FEM [10,11], viene proposto un approccio integrato per la simulazione del comportamento dinamico di un kart utile per la progettazione e ottimizzazione del telaio. Esso accoppiato con un opportuno modello di controllo della traiettoria consente, inoltre, di eseguire in via preventiva le regolazioni necessarie per ottimizzare il comportamento del sistema rispetto al singolo specifico tracciato di gara.

## 2. DESCRIZIONE DEL MODELLO HANDLING

Il modello dinamico del veicolo è stato realizzato avvalendosi del software multibody Working Model 3D [12]. Il Kart è stato schematizzato come un unico corpo rigido, rappresentando l'effettiva distribuzione delle masse illustrata in tabella.

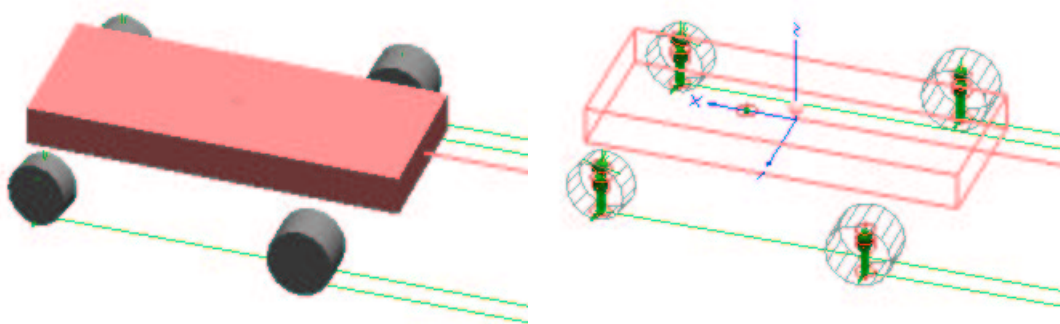


Fig. 1 Modello multibody del go kart

Pilota	70
Scocca	12
Motore	12.5
Altro (ruote, assale, carburante, freni, marmitta, ecc.)	45.5
Totale	140

Tab. 1 Distribuzione delle masse di un go kart

Per modellare l'effetto del cinematismo dello sterzo sono stati introdotti due vincoli di tipo *Revolute motor*, in corrispondenza dei collegamenti fra telaio e fusi di sterzo, con controllo sulla posizione angolare; è stato quindi introdotto un *input slider* per assegnare l'angolo di sterzata desiderato, tale angolo viene direttamente imposto ad una delle due ruote, l'angolo dell'altra viene impostato ipotizzando una sterzata cinematica perfetta. I due vincoli sono controllati dalle seguenti espressioni:

$$ruota1\ angolo = input[36]$$

$$ruota2\ angolo = atan(1/(1/tan(input[36]) + 670/1069))$$

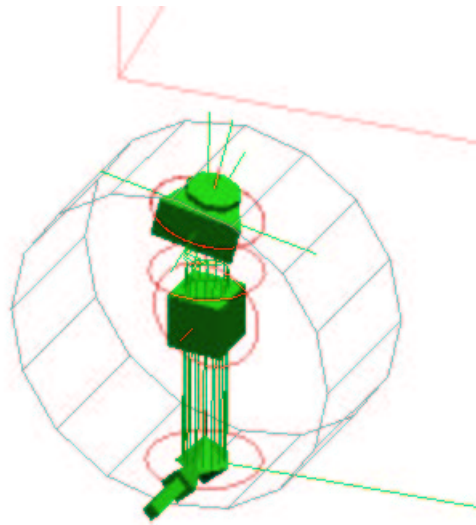


Fig. 2 Particolare della ruota anteriore sinistra del modello multibody

L'angolo di caster è stato assunto pari a 13° ed è stato imposto orientando opportunamente il collegamento fra telaio e fuso.

Il punto di contatto a terra è stato simulato mediante un cilindro fittizio, si è utilizzato quindi il vincolo sfera su piano, reso unilatero con l'opzione *generic constraint*, per consentire l'eventuale distacco di una ruota; la ruota è stata rappresentata mediante un cilindro che non partecipa al contatto, ma che viene mantenuto in rotazione alla velocità opportuna da un *revolute motor* controllato in base alla velocità del punto di contatto, al fine di rappresentare correttamente le azioni inerziali scambiate fra ruota e telaio. Le azioni laterali di deriva sono state inserite come carichi esterni dipendenti dall'atto di moto stesso utilizzando un modello linearizzato.

Si è assunta una dipendenza lineare dall'angolo di deriva fino all'angolo di saturazione (pari a 15°), il tratto successivo viene considerato costante; si è assunta inoltre una dipendenza lineare dal carico verticale fino al raggiungimento di una carico di soglia oltre il quale la forza trasversale rimane costante. Il modello del pneumatico è governato quindi dalle equazioni seguenti (valide per la ruota posteriore):

$$F_{zmax} := \frac{F_{tmax}}{\text{aderenza}}$$

$$F_{zmax} = 5.882 \times 10^3$$

$$F_{xmax}(F_z) := \text{if} \left( F_z < F_{zmax}, \text{aderenza} \cdot F_{zmax} \cdot \frac{F_z}{F_{zmax}}, \text{aderenza} \cdot F_{zmax} \right)$$

$$F_{xlin}(\alpha, F_z) := \text{if} \left( \alpha < \alpha_{max}, -F_{xmax}(F_z) \cdot \frac{\alpha}{\alpha_{max}}, -F_{xmax}(F_z) \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|} \right)$$

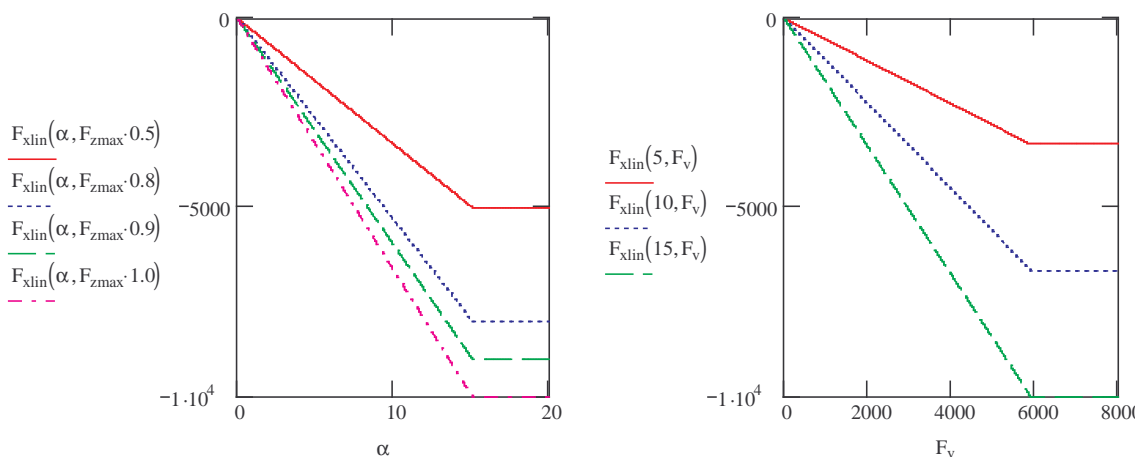


Fig. 3 Andamento della forza trasversale in funzione dell'angolo di deriva e del carico verticale

L'andamento del carico trasversale è mostrato nella fig. (3). Il modello linearizzato è stato implementato nel modello controllando la forza di deriva mediante la seguente espressione:

```
if(atan2(express(body[18].v,0,18).y,express(body[18].v,0,18).x)/15/deg<1.0,
-if(constraint[25].force.z/(4000*1.6)<1.0,4000*constraint[25].force.z/(4000*1.6),4000)
*atan2(express(body[18].v,0,18).y,express(body[18].v,0,18).x)/15/deg,
-if(constraint[25].force.z/(4000*1.6)<1.0,4000*constraint[25].force.z/(4000*1.6),4000))
```

La funzione atan2 è stata sfruttata per calcolare l'angolo di deriva come l'angolo formato fra le componenti x ed y del vettore velocità del cilindro collegato alla ruota (body[18]), espresso nel sistema di riferimento solidale alla ruota. Il carico verticale è stato valutato come reazione del vincolo a terra (constraint[25]). Per inserire le saturazione si è sfruttata l'istruzione *if* sia sull'angolo di deriva che sul carico verticale. I valori numerici utilizzati nel modello linearizzato sono i seguenti [2]:

Pneumatico posteriore

$$\alpha_{\max} := 15 \cdot \text{deg} \quad F_{\text{tmax}} := 10000 \cdot \text{N} \quad \text{aderenza} := 1.7$$

Pneumatico anteriore

$$\alpha_{\max} := 15 \cdot \text{deg} \quad F_{\text{tmax}} := 4000 \cdot \text{N} \quad \text{aderenza} := 1.7$$

Per valutare correttamente i trasferimenti di carico è necessario introdurre l'elasticità del sistema. La rigidità radiale del pneumatico è stata simulata inserendo un vincolo del tipo *rigid joint on slot* il quale libera lo scorrimento nella direzione radiale, ed aggiungendo un vincolo *linear spring damper* con i seguenti valori di rigidità e di smorzamento [2]:

$$k = 100000 \text{ N/m} \quad \zeta = 0.2 \text{ pneumatico posteriore}$$

$$k = 750000 \text{ N/m} \quad \zeta = 0.1 \text{ pneumatico anteriore}$$

Per passare dalla percentuale di smorzamento critico allo smorzamento viscoso si è assunta una massa di 35 kg per ruota.

La rigidità del telaio, ricavata dall'analisi FEM illustrata nel paragrafo successivo, è stata considerata nel modello multibody inserendo elementi elastici *linear spring* in serie rispetto ai corrispondenti elementi che rappresentano i pneumatici. I valori delle rigidità usate sono stati desunti dalla matrice di rigidità determinata come illustrato al paragrafo (3). Si è invece trascurato lo smorzamento strutturale del telaio rispetto a quello dei pneumatici.

### 3. MODELLO FEM DEL TELAIO

Per valutare correttamente le caratteristiche di rigidità del telaio del Kart è stato preparato un modello geometrico, rappresentante la linea media del traliccio, sfruttando il *preprocessor* commerciale Femap 7.0 [13]

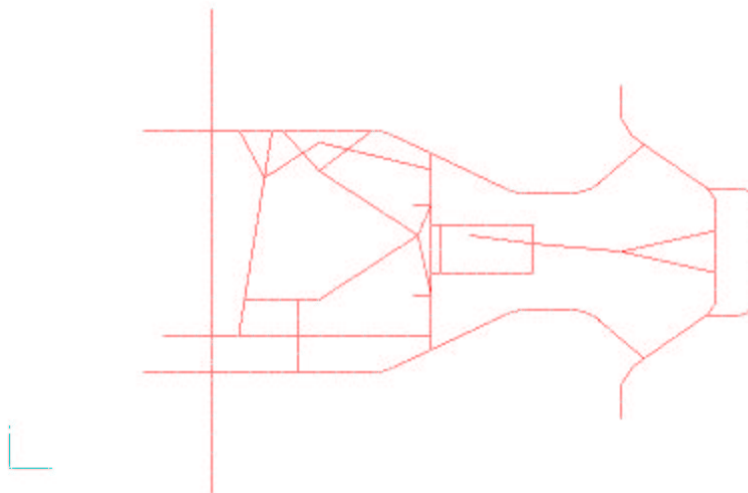


Fig. 4 Modello geometrico del telaio a traliccio del kart

Il modello geometrico è stato quindi utilizzato per generare la griglia della struttura. Sono state definite allo scopo le opportune sezioni rette rappresentanti i tubolari.

Il modello FEM è illustrato nella fig. (5), rappresentando l'effettivo ingombro tridimensionale della sezione retta degli elementi BEAM. Le analisi strutturali sono state svolte con il solutore MSC/Nastran 70.5.

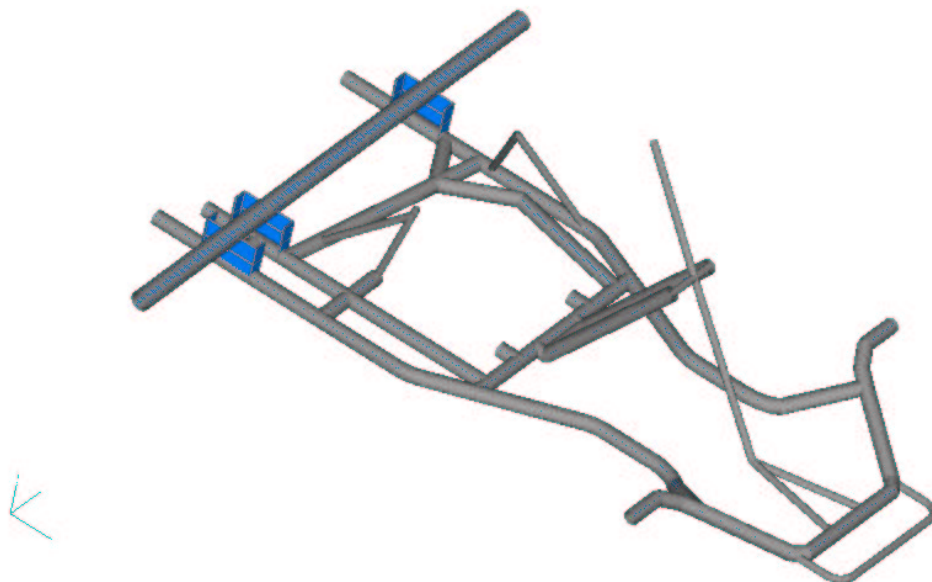


Fig. 5 Modello FEM; gli elementi CBEAM sono rappresentati visualizzando l'effettivo ingombro della sezione retta

Il modello FEM è costituito da 293 nodi e 310 elementi BEAM e consente di valutare molto rapidamente i parametri di rigidità del kart.

La massa del telaio, privato del piantone dello sterzo e dell'assale posteriore, risulta pari a 11.456 kg contro i 12 kg ottenuti sperimentalmente.

La rigidità torsionale del telaio è stata ottenuta caricando la parte anteriore, in corrispondenza dei fuselli attorno a cui sterzano le ruote, con due forze concentrate pari a 750 N e vincolando l'assale posteriore nei nodi rappresentativi dei mozzi ruota. Utilizzando gli spostamenti registrati nell'analisi

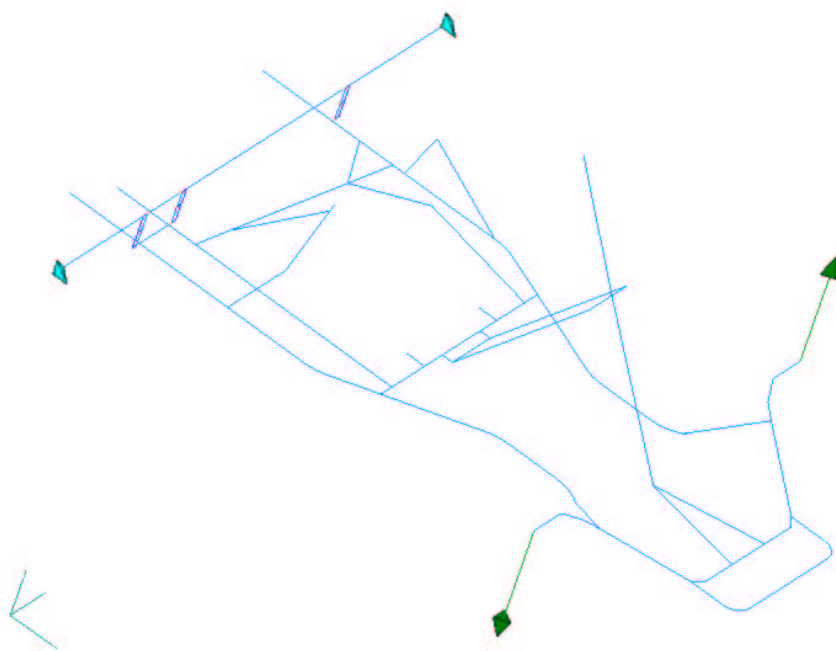


Fig. 6 Condizioni di carico e di vincolo usare per il calcolo della rigidità torsionale del telaio

ottenendo un valore di rigidità pari a:

$$K_t = 1.69e+005 \text{ Nmm}^\circ$$

Per estrarre i parametri di rigidità di interesse veicolistico ci si è avvalsi della tecnica di condensazione statica. La matrice di rigidità può essere ottenuta ponendo nell'*a-set* [14] i soli gradi di libertà da prendere in considerazione, che in questo caso sono i quattro spostamenti verticali corrispondenti ai punti di attacco delle ruote che corrispondono all'effetto sospensivo elastico fornito dal telaio. Per estrarre correttamente i parametri di rigidità si è vincolato il telaio isostaticamente in corrispondenza dei punti di attacco con il sedile del pilota, come mostrato nella fig. (7).

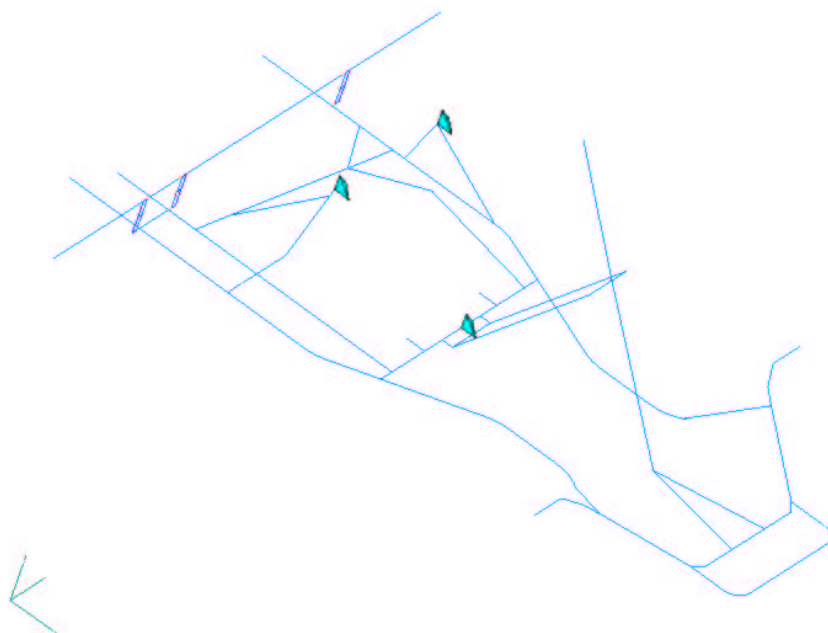


Fig. 7 Condizioni di vincolo usate per il calcolo della matrice di rigidità

In particolare sono state bloccate le traslazioni verticali dei tre nodi, le traslazioni trasversali dei due nodi superiori e la traslazione longitudinale di uno dei due nodi superiori. Operando la condensazione statica ed utilizzando una procedura DMAP per generare in uscita la matrice di rigidezza del modello condensato si ottiene la seguente matrice di rigidezza in formato NASTRAN DMIG:

```
DMIG KAAEXT 0 6 2 0 1548
DMIG* KAAEXT 1736 3
* 1736 3 7.549279669D+04
DMIG* KAAEXT 1786 3
* 1736 3 3.468319850D+04
* 1786 3 7.641578113D+04
DMIG* KAAEXT 1789 3
* 1736 3 1.630912005D+04
* 1786 3 1.045120788D+03
* 1789 3 3.487827160D+04
DMIG* KAAEXT 1795 3
* 1736 3 3.953224634D+03
* 1786 3 1.418446400D+04
* 1789 3 7.540213284D+03
* 1795 3 3.571946412D+04
```

la quale ordinando i gradi di libertà nell'ordine, anteriore destro, anteriore sinistro, posteriore destro e posteriore sinistro assume la forma:

$$K = \begin{bmatrix} 3.4878 & 0.7540 & 0.1045 & 1.6309 \\ 0.7540 & 3.5719 & 1.4184 & 0.3953 \\ 0.1045 & 1.4184 & 7.6416 & 3.4683 \\ 1.6309 & 0.3953 & 3.4683 & 7.5493 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \frac{N}{m}$$

che invertita porge la matrice di flessibilità:

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3481 & -0.0845 & 0.0544 & -0.0958 \\ -0.0845 & 0.3237 & -0.0752 & 0.0359 \\ 0.0544 & -0.0752 & 0.1865 & -0.0935 \\ -0.0958 & 0.0359 & -0.0935 & 0.1942 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \frac{m}{N}$$

Per verificare al correttezza della procedura sono state effettuate quattro analisi statiche, imponendo un carico unitario ad ogni ruota ed ottenendo gli stessi risultati; come ulteriore verifica si è proceduto calcolare la rigidezza torsionale del telaio moltiplicando la matrice di flessibilità per il vettore:

$$F = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \\ -0.6829 \\ 0.6829 \end{bmatrix} \cdot N$$

che corrisponde ad una condizione di carico autoequilibrata di torsione ottenendo i seguenti spostamenti:

$$u = \begin{bmatrix} 0.3301 \\ -0.3323 \\ -0.0616 \\ 0.0649 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} m$$

ed una rigidezza torsionale pari a:

$$K_t = 1.64e+005 \text{ Nmm}^\circ$$

che risulta congruente con quanto calcolato precedentemente.

#### 4. STUDIO DELL'INSERIMENTO IN CURVA

Il modello multibody sviluppato per il GoKart, integrato con i parametri di rigidezza calcolati con il modello strutturale, consente di valutare l'effetto della rigidezza stessa durante la percorrenza di una curva.

Le simulazioni numeriche sono state svolte nell'ipotesi di telaio rigido, e nell'ipotesi di telaio deformabile, per valutare l'importanza della rigidezza sulla dinamica del veicolo.

Il controllo della traiettoria è stato imposto assegnando la seguente legge alle ruote sterzanti:

$ruota1\ angolo = -step(0.001\ deg, 1\ s, 6.5\ deg, 1.2\ s)$   
 $ruota2\ angolo = -atan(1/(1/tan(step(0.001\ deg, 1\ s, 6.5\ deg, 1.2\ s)) + 670/1069))$

Per evitare rallentamenti durante la curva, a causa della componente longitudinale delle forze di deriva, si è deciso di introdurre una forza applicata nel baricentro, controllata dalla velocità di avanzamento del veicolo con la seguente legge proporzionale:

$-(10000*(express(body[9].v,0,9).x-9.3\ m/s)/9.3)\ kg/s$

In figura (8) sono rappresentati gli andamenti dei carichi verticali agenti sulle ruote del kart durante la percorrenza della curva, per ascisse a partire da  $t=1$  sec.; la fase precedente è invece un transitorio in cui si stabilizzano le oscillazioni di beccheggio dovute alle condizioni iniziali di velocità imposte al corpo rappresentante il telaio. E' evidente come l'inserimento della rigidità del telaio nel modello comporti una variazione significativa nelle ripartizioni delle reazioni verticali. In particolare il carico sul pneumatico posteriore destro (si tenga conto che si sta simulando la percorrenza di una curva a destra) subisce un abbassamento, rispetto al modello rigido, che lo porta ad un valore inferiore anche al carico agente sulla ruota anteriore destra. Tale risultato è senza dubbio significativo per lo studio delle condizioni di distacco del pneumatico stesso, indispensabili per la valutazione delle caratteristiche di guidabilità del kart, considerata anche la tecnica usuale di guida adottata dai piloti in corsa.

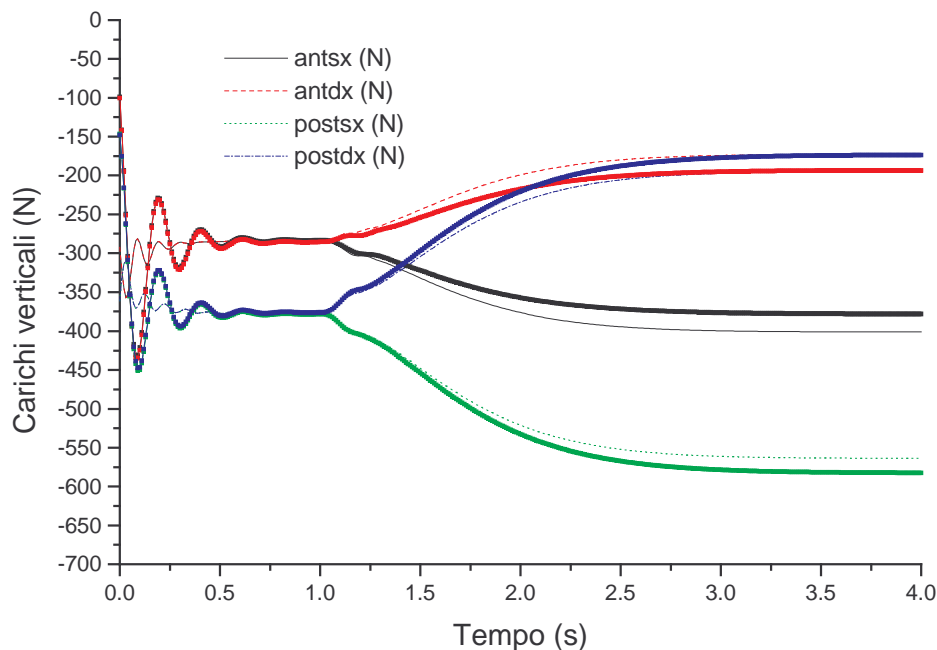


Fig. 8 Andamento dei carichi verticali sulle ruote durante la percorrenza di una curva (linee spesse per il modello con telaio flessibile)

## 5. CONCLUSIONI

In questo articolo è stata studiata una possibile metodologia per simulare il comportamento dinamico di un kart da competizione in curva, tenendo conto della rigidità del telaio. Tale parametro si dimostra avere significative influenze sui carichi agenti sui pneumatici e consente di giudicare la guidabilità del veicolo in maniera più aderente alla realtà.

Avvalendosi delle consolidate tecniche di modellazione multibody e FEM è stato sviluppato un modello di simulazione in grado di prevedere l'effetto della geometria del telaio sulle prestazioni del veicolo.

Lo strumento integrato di simulazione può essere utilizzato per ottimizzare la progettazione del telaio poiché si ha un legame diretto fra il dato costruttivo (geometria telaio) e il comportamento del veicolo.

La bontà dell'approccio utilizzato deve tuttavia essere validata sperimentalmente ed è già in corso una campagna di acquisizioni in pista per testare e tarare il modello.

Il modello realizzato, infine, si presta ad ottimizzazioni ancora più spinte, poiché, sviluppando un sistema di controllo traiettoria, può essere utilizzato per valutare il tempo su giro di un circuito (o su una porzione



significativa di esso). In tale ottica lo strumento proposto, oltre che come valido supporto alla progettazione, potrebbe essere utilizzato anche come strumento di previsione dell'assetto, il che consentirebbe una messa a punto più veloce durante le prove precedenti ogni gara, specialmente se integrato con un database delle tarature utilizzate su ogni circuito.

## Bibliografia

- [1] M. Giglio, A. Pecchio, P. Ravasi, "L'utilizzo del FEM per l'ottimizzazione di un telaio di Go-Kart" ATA Ingegneria Automobilistica, 2000.
- [2] E. Guglielmino, I.D. Guglielmino, G. Mirone, "Caratterizzazione numerica e sperimentale di un Go-Kart da competizione" AIAS 2000, Lucca, settembre 2000.
- [3] E. Vitale, F. Frendo, M. Amorosa, E. Ghelardi, "Acquisizione dati a bordo di Go-Kart da competizione" AIAS 2000, Lucca, settembre 2000.
- [4] Homologation chassis 1997 CIK/FIA
- [5] M. Natoli, "Il manuale del kart", Archimede Editore
- [6] M. E. Biancolini, C. Brutti, L. Reccia, D. Del Pin "Three Dimensional Dynamic Model for a Quick Simulation of Vehicle Collisions", SAE Proceedings, ATT – Automotive and Transportation Technology Congress, Barcelona, 1- 4 October 2001.
- [7] Sassaroli P., "Simulazione dell'urto di veicoli in condizioni piane" Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", 2000.
- [8] Del Pin D., "Sviluppo di un metodo di calcolo 3d multi body elastoviscoplastico per la simulazione del moto e dell'urto di veicoli" Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", 2001.
- [9] M. E. Biancolini, C. Brutti, E. Pezzuti, "Shape optimisation for structural design by means of Finite Elements Method", presentato all'ADM 2001.
- [10] M. E. Biancolini, C. Brutti, E. Pennestrì "On the dynamics of the trasmission with a double cardan joint" Tenth world congress on the theory of machine and mechanism, University of Oulu, Finland, June 20 – 24, 1999
- [11] M. E. Biancolini, C. Brutti, E. Pennestrì "An integrated approach to the dynamic analysis of cardan joint" 6th Applied Mechanisms and Robotics Conference", Cincinnati – Ohio USA, 12 – 15 December.1999
- [12] Working Model 3D 4.0 - User Manual
- [13] Femap 7.0 - User Guide
- [14] G.Genta, "Meccanica dell'autoveicolo" Ed. Levrotto e Bella, Torino.
- [15] J.P. Caffrey, J.M. Lee (1997), "MSC/NASTRAN User's Guide, Linear Static Analysis", The Mc Schwendler Corporation Los Angeles.

